

2017 冲刺高考最后 1 卷(联考版)

参考答案与解析

理科数学

一、选择题

1. D $\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i-i+i^2}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, \therefore 复数 $\frac{2-i}{1+i}$ 的虚部为 $-\frac{3}{2}$.
2. D 由题意, ζ 的期望为 μ , 方差为 σ^2 , 所以, X 的期望为 $2\mu-1$, 方差为 $4\sigma^2$.
3. C 命题 $\neg p$: 存在 $x \in (1, 3)$, 使得 $e^x - a > 0$, 则 p : $\forall x \in (1, 3)$, 都有 $e^x - a \leq 0$, 即 $a \geq e^x$, 而 $(e^x)_{\max} = e^3$, 若 p 是真命题, 则 $a \geq e^3$.
4. D 当 $x > 0$ 时, $\sin x < x < e^x - 1$, 由定积分的几何意义, 选 D.
5. B $i=1$, 满足条件 $i \leq 9$, 执行循环体, $S = \frac{1}{1 \times 2}$, $i=2$; $i=2$, 满足条件 $i \leq 9$, 执行循环体, $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$, $i=3$; 依此类推, $i=9$, 满足条件 $i \leq 9$, 执行循环体, $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10}$, $i=10$; $i=10$, 不满足条件 $i \leq 9$, 退出循环体, 输出 $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.
6. A $f'(x) = \frac{1}{x} - \sin x - \frac{6}{\pi} + \frac{9}{2}$, 则 $f'(\frac{\pi}{6}) = 4$, 故 $a_{n+1} + a_n = 4n + 3$. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_{n+1} = a_1 + nd$. 由 $a_{n+1} + a_n = 4n + 3$, 得 $(a_1 + nd) + [a_1 + (n-1)d] = 4n + 3$, 解得 $d = 2$, $a_1 = \frac{5}{2}$.
7. A 设圆心为 D , 准线为 l , 则 $|PF| + |PQ| \geq |PF| + |PD| - 1 = d_{P-l} + |PD| - 1 \geq 4$.
8. B 由题意, 展开式中项的系数为 $C_n^r \cdot 3^{\frac{n-r}{2}} \cdot 2^{\frac{r}{2}}$, 若系数为有理数, 则 $n-r$ 是 2 的倍数, r 是 3 的倍数. $n=6, r=0, 6$, 不符合; $n=7, r=3$, 符合; $n=8, r=0, 6$, 不符合; $n=9, r=3, 9$, 不符合.
9. D 由三视图可知: 该几何体是一个三棱锥, $AB=AC=AD=2$, 且 AB, AC, AD 两两垂直. 把此三棱锥补成正方体, 则这个空间几何体的外接球的直径为此正方体的对角线 $2\sqrt{3}$, 因此这个空间几何体的外接球的表面积 $S = 4\pi \cdot 3 = 12\pi$.
10. C 由题意分两种情况: (1) 不使用红色, 有 2 种涂法; (2) 使用红色, 有 $2 \times 8 = 16$ 种涂法. 共计 18 种方法.
11. B 由题意得 $g(x) = 2\sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] + 3 = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$. 又由 $g(x) = 4$, 得 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. 解得 $4x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 即 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$). $\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore x = \frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{\pi}{4}$. 故所有根之和为 $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$.
12. C 根据条件, 有 $x_3 = \frac{ax_1 - 1}{x_1}$, 从而 $x_2 = a - \frac{1}{x_3} = \frac{(a^2 - 1)x_1 - a}{ax_1 - 1}$, 进而由 $x_1 + \frac{1}{x_2} = a$ 可得 $x_1 + \frac{ax_1 - 1}{(a^2 - 1)x_1 - a} = a$, 整理得 $(a^2 - 1)(x_1^2 + 1 - ax_1) = 0$, 于是 $a = \pm 1$ 或 $a = x_1 + \frac{1}{x_1}$. 一方面, 若 $a = 1$, 取 $x_1 = -1$, 则 $x_3 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, 于是 a 可以取得 1; 类似地, 当 $x_1 = 1$, $x_3 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ 时, a 可以取得 -1; 另一方面, 若 $a = x_1 + \frac{1}{x_1}$, 则 $x_2 = x_1$, 与 A, B, C 是不同的三点矛盾, 综上所述, a 的值为 ± 1 .

二、填空题

13. $\frac{1}{16}$
14. 4 因为 a 为单位向量, 可设 $a = (1, 0)$, 则由题中条件可设 $b = (1, x)$, $c = (2, y)$, 由 $b \cdot c = 1$ 知 $2 + xy = 1$, 即 $y = -\frac{1}{x}$. 从而有 $|a + b + c| = \left| (1, 0) + (1, x) + \left(2, -\frac{1}{x}\right) \right| = \sqrt{16 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \geq 4$, 当 $x = \pm 1$ 时等号成立.

15. $(1, \sqrt{7})$

16. $\frac{15}{62}$ 由累加法知 $a_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} + 1$, 所以 $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 直接求和得 $S_n = n + 1 - \frac{1}{n+1}$, 所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{n+1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right)$. $T_{60} = \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_6} - \frac{1}{S_8} + \dots - \frac{1}{S_{60}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) - \dots - \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{62} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{62} \right) = \frac{15}{62}$.

三、解答题

17. (I) 由已知, $\angle BMC = 120^\circ$, 在 $\triangle BMC$ 中, 由余弦定理得 $2^2 = 1^2 + CM^2 - 2 \cdot 1 \cdot CM \cdot \cos 120^\circ$, $\therefore CM = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

(II) 设 $\angle ABM = \alpha$, 由已知得, $MB = 2\cos \alpha$, 在 $\triangle BMC$ 中, 由正弦定理得, $\frac{2}{\sin 120^\circ} = \frac{2\cos \alpha}{\sin \alpha}$, 化简得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \sin \alpha$, 代入 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\therefore \sin \angle ABM = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

18. (I) 由题意可知, 样本容量 $n = \frac{8}{0.016 \times 10} = 50$, 故 $y = \frac{2}{50 \times 10} = 0.004$, $\therefore x = 0.100 - 0.004 - 0.010 - 0.016 - 0.040 = 0.030$. $\therefore n = 50, x = 0.030, y = 0.004$.

(II) 分数在 $[80, 90)$ 的学生共有 5 人, 其中理科学学生 2 人, 文科学学生 3 人. $p = \frac{C_3^2 C_2^1 + C_3^3}{C_5^3} = \frac{7}{10}$.

(III) 根据样本频率分布直方图, 80 分以上的学生比例为 14%, $\frac{(0.3-0.14)}{0.4} \times 10 = 4.80 - 4 = 76$, 所以根据样本数据, 估计得奖的分数线为 76 分.

19. (I) 连接 B_1C , 与 BC_1 交于点 N , 连接 MN , 则 MN 为 $\triangle AB_1C$ 的中位线, 所以 $MN \parallel AB_1$, $MN \subset$ 平面 C_1MB , $AB_1 \not\subset$ 平面 C_1MB , $\therefore AB_1 \parallel$ 平面 C_1MB .

(II) 以 A 为原点, AB 和 AC 所在的直线为 x, y 轴, 过点 A 和平面 ABC 垂直的直线为 z 轴建立空间直角坐标系. \because 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC , $\therefore \angle A_1AB$ 为 AA_1 和平面 ABC 所成角的平面角, $\angle A_1AB = 60^\circ$. 设 AB 长为 2, 则 $B(2, 0, 0), C_1(1, 2, \sqrt{3}), M(0, 1, 0)$. 设平面 MBC_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, 1)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{MC_1} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \end{cases}$ 得 $\mathbf{n}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$, 平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$, $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 又二面角 $C_1 - BM - C$ 为锐二面角, 所以二面角 $C_1 - BM - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

20. (I) 设过 M 点的直线方程为 $x = my - \frac{6}{5}$, 代入 $x^2 + 4y^2 = 4$ 得到 $(m^2 + 4)y^2 - \frac{12}{5}my - \frac{64}{25} = 0$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{12m}{5(m^2 + 4)}, y_1 y_2 = -\frac{64}{25(m^2 + 4)}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (x_1 + 2, y_1)(x_2 + 2, y_2) = (m^2 + 1)y_1 y_2 + \frac{4}{5}m(y_1 + y_2) + \frac{16}{25} = 0$. 经检验, 当过 M 点的直线斜率为 0 时, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ 成立, $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的值为 0.

(II) 当过 M 点的直线斜率为 0 时, $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AQ}| = 0$. 当过 M 点的直线斜率不为 0 时, $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AQ}| = 2S_{\triangle APQ} = |AM| |y_1 - y_2| = \frac{16}{25} \sqrt{\frac{25m^2 + 64}{(m^2 + 4)^2}} \in \left(0, \frac{32}{25} \right]$, 综上, $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AQ}| \in \left[0, \frac{32}{25} \right]$.

21. (I) $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f''(x) \leq 2(\ln 2)^2 - 2 = -2(1 + \ln 2)(1 - \ln 2) < 0$, 故 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 又 $f'(0) = \ln 2 > 0, f'(1) = 2\ln 2 - 2 < 0$. 所以, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$. 即 $f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在区间 $(x_0, 1)$ 上单调递减, $\therefore f(x)$ 的最小值为 $\min\{f(0), f(1)\} = 0$.

(II) 不妨设 $a \geq b$, 则由 $b = \frac{1}{a}$ 知 $a \geq 1$, 故只要证 $2^a \left(2^a - 2^{a - \frac{1}{a}} - 1 \right) \geq 0$, 即证, $\forall a \geq 1, 2^a - 2^{a - \frac{1}{a}} - 1 \geq 0$. 设 $g(x)$

$=2^x-2^{x-\frac{1}{x}}-1(x\geq 1)$, 则 $g'(x)=\ln 2 \cdot 2^{x-\frac{1}{x}} \cdot \left(2^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x^2}\right)$. 由 (I) 可知 $2^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x^2}\geq 0$, 又 $2^{x-\frac{1}{x}}>0$, 所以 $x>1$ 时, $g'(x)>0$, 故 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. 又因为 $g(1)=0$, 所以 $g(x)\geq g(1)=0$, 从而 $2^a-2^{a-\frac{1}{a}}-1\geq 0$, 故 $2^{\frac{1}{a}}\left(2^a-2^{a-\frac{1}{a}}-1\right)\geq 0$, 原不等式成立.

22. (I) 由 $\rho(\cos \theta+\sin \theta)=3$ 得直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-3=0$. 由 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos \theta, \\ y=\sin \theta \end{cases}$ 得 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(II) 在曲线 $C: \frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上任取一点 $P(\sqrt{3}\cos \theta, \sin \theta)$, 则点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{3}\cos \theta+\sin \theta-3|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-3\right|}{\sqrt{2}}\leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$, 当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 时, 取得最大值 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 故曲线 C 上的点到直线 l 的最大距离为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

23. (I) $f(x)=|x+5|-|x-2|\geq 3$, 当 $x\geq 2$ 时, 有 $x+5-(x-2)\geq 3$, 解得 $x\geq 2$; 当 $x\leq -5$ 时, $-x-5+(x-2)\geq 3$, 解得 $x\in\varnothing$; 当 $-5<x<2$ 时, 有 $2x+3\geq 3$, 解得 $0\leq x<2$. 综上, $f(x)\geq 3$ 的解集为 $\{x|x\geq 0\}$.

(II) 由绝对值不等式的性质可得, $||x+5|-|x-2||\leq |(x+5)-(x-2)|=7$, 则有 $-7\leq |x+5|-|x-2|\leq 7$. 若 $f(x)\geq |a-4|$ 有解, 则 $|a-4|\leq 7$, 解得 $-3\leq a\leq 11$. 所以 a 的取值范围是 $[-3, 11]$.

