

2017 冲刺高考最后 1 卷(联考版)

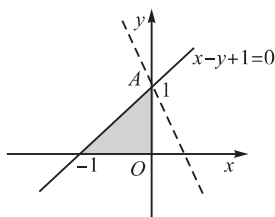
参考答案与解析

文科数学

1. C 集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0, x \in \mathbf{Z}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $B = \left\{x \mid 1 - \frac{5}{x} \geq 0\right\} = \{x | x \geq 5 \text{ 或 } x < 0\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | 0 \leq x < 5\}$, 所以 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 故选 C.

2. B 由题意得, $z = \frac{5i}{2-i} = \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -1 + 2i$, 其在复平面对应的点为 $(-1, 2)$, 位于第二象限. 故选 B.

3. D 不等式组 $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0, \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ 表示的可行域如图所示, 目标函数 $z = 2x + y$ 可化为 $y = -2x + z$, 则 z 表示直线 $y = -2x + z$ 的纵截距. 显然, 当直线 $y = -2x + z$ 经过 $A(0, 1)$ 时, 纵截距 z 取得最大值 1. 故选 D.



第 3 题答图

4. A 设阴影部分的面积为 S , 由几何概型可知 $\frac{S}{4} = \frac{2}{3}$, 解得 $S = \frac{8}{3}$. 故选 A.

5. A $i=1 > 50$ 不成立, 执行第一次循环, $S=0+2=2, i=2 \times 1+1=3; i=3 > 50$ 不成立, 执行第二次循环, $S=2+2=4, i=2 \times 3+1=7; i=7 > 50$ 不成立, 执行第三次循环, $S=4+2=6, i=2 \times 7+1=15; i=15 > 50$ 不成立, 执行第四次循环, $S=6+2=8, i=2 \times 15+1=31; i=31 > 50$ 不成立, 执行第五次循环, $S=8+2=10, i=2 \times 31+1=63; i=63 > 50$ 成立, 跳出循环, 输出 $S=10$. 故选 A.

6. D 显然, $f(x)$ 为偶函数, 排除 A, B. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$;

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 内为增函数, 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 内为减函数, 排除 C. 故选 D.

7. C 由题意得 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\therefore \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{5}$, $\therefore \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{5}$, 即 $\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1} = \frac{2}{5}$,

$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ ($\tan \frac{\theta}{2} = 2$ 舍去). 又焦点到渐近线的距离等于 1, 可得 $b=1$.

当 $a > b$ 时, 有 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$, $\therefore a=2$,

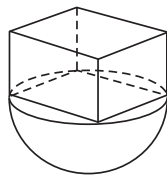
$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$, 此时焦距 $2c = 2\sqrt{5}$;

当 $a < b$ 时, 有 $\tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{b}{a}$, $\therefore a = \frac{1}{2}$,

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 此时焦距 $2c = \sqrt{5}$. 故选 C.

8. B 如图所示, 该几何体为半球与正四棱柱的组合物体, 其中球的半径为 $\sqrt{2}$, 正四棱柱底面边长为 2, 高为 1, 所以其表面积 $S = 2\pi \cdot (\sqrt{2})^2 + \pi \cdot (\sqrt{2})^2 + 4 \times 2 \times 1 = 8 + 6\pi$. 故选 B.

9. A 原式可化为 $1 - \cos^2 x + \cos x + a = 0$, 设 $t = \cos x$, 由于 $x \in [0, \pi]$ 内有两解, 且 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 内单调, 则问题转化为 $t^2 - t - a - 1 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 内有两解.

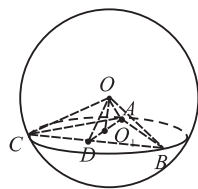


第 8 题答图

令 $g(t) = t^2 - t - a - 1$, 则有 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ g(1) \geq 0, \end{cases} \therefore -\frac{5}{4} < a \leq -1$. 故选 A.

10. B 由题意得 $AO_1 = \sqrt{5}$, $\therefore O_1D = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\therefore OD = \frac{\sqrt{21}}{2}$, 设过点 D 且垂直于 OD 的截面的半径

为 r' , 则 $r'^2 = 3^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$, \therefore 截面面积的最小值为 $\pi r'^2 = \frac{15}{4}\pi$. 故选 B.



第 10 题答图

11. B $\because f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}$, 且 $f(x) + f(1-x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} + \left(1-x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\therefore \sum_{k=1}^{2016} f\left(\frac{k}{2017}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right)\right] = \frac{1}{2} \times 1008 = 504$. 故选 B.

12. D 当 $q=1$ 时, $a_{p+1} = a_p + a_1 = a_p + 2$, $\therefore \{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 2 的等差数列, $\therefore a_n = 2n$, $S_n = \frac{(2+2n)n}{2} = n^2 + n$, $\therefore f(n) = \frac{n^2 + n + 60}{n+1} = n + \frac{60}{n+1} = (n+1) + \frac{60}{n+1} - 1 \geq 2\sqrt{60} - 1$, 当且仅当 $n = \sqrt{60} - 1$ 时等号成立, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, $\therefore f(6) = 14\frac{4}{7}$, $f(7) = 14\frac{1}{2} < f(6)$, $\therefore f(n)$ 的最小值为 $\frac{29}{2}$. 故选 D.

13. $\frac{19\sqrt{13}}{13}$ $a \cdot b = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, 向量 $2a+3b$ 在向量 $2a+b$ 方向上的投影为 $\frac{(2a+3b) \cdot (2a+b)}{|2a+b|} = \frac{4 \times 4 + 3 \times 9 + 8 \times (-3)}{\sqrt{4 \times 4 + 9 + 4 \times (-3)}} = \frac{19}{\sqrt{13}} = \frac{19\sqrt{13}}{13}$.

14. 192 由题意知, 每层塔的灯的数量自顶层至底层依次构成等比数列, 记为 $\{a_n\}$, 则 $q=2$, $S_7=381$, $\therefore a_1=3$, $\therefore a_7 = a_1 \cdot q^6 = 3 \times 2^6 = 192$, 即塔底层有 192 盏灯.

15. $\frac{1}{3}$ 由题意得, 圆 $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $(1, 0)$ 到直线 $l: y=kx (k>0)$ 的距离为 $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, 弦长为 $2\sqrt{1 - \frac{k^2}{k^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$, 圆 $C_2: (x-3)^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $(3, 0)$ 到直线 $l: y=kx (k>0)$ 的距离为 $\frac{3k}{\sqrt{k^2+1}}$, 弦长为 $2\sqrt{1 - \frac{9k^2}{k^2+1}} = \frac{2\sqrt{1-8k^2}}{\sqrt{k^2+1}}$, \therefore 直线 l 被圆 C_1, C_2 所截得两弦的长度之比是 3, $\therefore \frac{2}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{1-8k^2}}{\sqrt{k^2+1}}$, $\therefore k = \frac{1}{3}$ 或 $k = -\frac{1}{3}$ (舍去).

16. $\left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 因为 $2\cos^2 x \in [0, 2]$, 又 $[\tan x]$ 表示整数, 所以当 $[\tan x] = 0$ 时, $\cos x = 0$ (舍去); 当 $[\tan x] = 2$ 时, $\cos^2 x = 1$ (舍去); 当 $[\tan x] = 1$ 时, $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 经验证知 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ 符合题意.

17. (I) 由已知及正弦定理可得 $\frac{\sin B}{\sin C} = \sqrt{3} \sin A + \cos A$, 即 $\sin B = \sqrt{3} \sin A \sin C + \cos A \sin C$.

又 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$, $\therefore \sin A \cos C = \sqrt{3} \sin A \sin C$.

$\because A$ 为三角形的内角, $\therefore \sin A > 0$, $\therefore \cos C = \sqrt{3} \sin C$, $\therefore \tan C = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 又 $C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{6}$.

(II) 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 即 $4 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab \geq (2 - \sqrt{3})ab$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立, $\therefore ab \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3})$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{4} ab \leq 2 + \sqrt{3}$, 即当 $a=b$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取最大值 $2 + \sqrt{3}$.

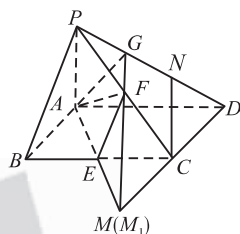
18. (I) 根据题设中的数据得到如下 2×2 列联表:

| | 非重度污染 | 重度污染 | 总计 |
|------|-------|------|-----|
| 供暖季 | 22 | 8 | 30 |
| 非供暖季 | 63 | 7 | 70 |
| 总计 | 85 | 15 | 100 |

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算, 得 $K^2 = \frac{100 \times (22 \times 7 - 63 \times 8)^2}{85 \times 15 \times 30 \times 70} \approx 4.575$. $\because 4.575 > 3.841$, \therefore 在犯错误概率不超过 5% 的前提下可以认为“该城市本年的空气重度污染与供暖有关”.

(II) 一年中空气质量指数 $x \leq 100$ 大约有 $360 \times \frac{6+14}{100} = 72$ 天; 空气质量指数 $100 < x \leq 300$ 大约有 $360 \times \frac{18+27+20}{100} = 234$ 天; 空气质量指数 $x > 300$ 大约有 $360 \times \frac{15}{100} = 54$ 天, 所以该企业本年度(按 360 天计算)的经済损失大约为 $0 \times 72 + 400 \times 234 + 54 \times 2000 = 201600$ (元).

19. (I) 证明: 由四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 可得 $\triangle ABC$ 为正三角形, 因为 E 为 BC 的中点, 所以 $AE \perp BC$, 又 $BC \parallel AD$, 因此 $AE \perp AD$. 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AE \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AE$. 而 $PA \subset$ 平面 PAD , $AD \subset$ 平面 PAD , $PA \cap AD = A$, 所以 $AE \perp$ 平面 PAD .



第 19 题答图

(II) 证明: 在平面 $ABCD$ 内, 连接 AE 并延长交 DC 于点 M , 则 $CM = CD$. 在平面 PCD 内, 连接 GF 并延长交 DC 于点 M_1 , 如图所示, 取 GD 的中点 N , 连接 CN , 则 $PG = GN = ND$. \because 点 F 为 PC 的中点, \therefore 在 $\triangle PCN$ 中有 $FG \parallel CN$, 即 $GM_1 \parallel CN$, \therefore 在 $\triangle GM_1D$ 中有 $CM_1 = CD$, \therefore 点 M 与点 M_1 重合, 即 AE 与 GF 相交于点 M , $\therefore A, E, F, G$ 四点共面.

(III) 连接 AF , 则 $V_{AECDFG} = V_{A-GFCD} + V_{A-EFC}$, $\because PF = FC, PG = \frac{1}{3}PD$, $\therefore \frac{S_{\triangle FCDG}}{S_{\triangle PCD}} = 1 - \frac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PCD}} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $\therefore V_{A-GFCD} = \frac{5}{6}V_{A-PCD} = \frac{5}{6}V_{P-ACD} = \frac{5}{12}V_{P-ABCD}$, 又 $V_{A-EFC} = V_{F-AEC} = \frac{1}{2}V_{P-AEC} = \frac{1}{8}V_{P-ABCD}$, $\therefore V_{AECDFG} = V_{A-GFCD} + V_{A-EFC} = \frac{13}{24}V_{P-ABCD}$, \therefore 平面 $AEFG$ 将四棱锥 $P-ABCD$ 所分两部分的体积比为 $11:13$ 或 $13:11$.

20. (I) 由条件可知 $A(-a, 0)$, 直线 $AB: y = x + a$, 则 $C(0, a)$. 设 $B(x_0, y_0)$, 由 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, 可得 $\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3}a, \\ y_0 = \frac{2}{3}a, \end{cases}$

即 $B(-\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a)$, 代入椭圆 E 的方程可得 $a^2 = 2b^2$, $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, $\therefore e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(II) 由(I)知, 椭圆 E 的方程可化为 $x^2 + 2y^2 - 2b^2 = 0$, 联立 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2b^2 = 0, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 消去 y 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2b^2 = 0$, $\therefore \Delta = (4km)^2 - 4(1 + 2k^2)(2m^2 - 2b^2) = 0$, 化简得 $m^2 = b^2(1 + 2k^2)$. 又 $P(-\frac{2km}{1 + 2k^2}, \frac{m}{1 + 2k^2})$, $Q(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k + m)$, 且 $PM \perp QM$, $\therefore \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (-\frac{2km}{1 + 2k^2} - \sqrt{2}, \frac{m}{1 + 2k^2}) \cdot (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k + m) = -\frac{2\sqrt{2}km}{1 + 2k^2} - 2 + \frac{2\sqrt{2}km + m^2}{1 + 2k^2} = 0$, $\therefore m^2 = 2(1 + 2k^2)$, $\therefore b^2 = 2, a^2 = 4$, \therefore 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, $\therefore A(-2, 0)$.

设直线 $p: x = ny - \frac{2}{3}$, $G(x_1, y_1)$, $H(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x = ny - \frac{2}{3}, \\ x^2 + 2y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ 消去 x 得 $9(n^2 + 2)y^2 - 12ny - 32 = 0$,

$$\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{12n}{9(n^2+2)}, \\ y_1 \cdot y_2 = -\frac{32}{9(n^2+2)}, \end{cases} \therefore \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} = (x_1+2, y_1) \cdot (x_2+2, y_2) = (x_1+2)(x_2+2) + y_1 y_2 = (n^2+1)y_1 y_2 +$$

$$\frac{4}{3}n(y_1+y_2) + \frac{16}{9} = \frac{-32(n^2+1)}{9(n^2+2)} + \frac{16n^2}{9(n^2+2)} + \frac{16}{9} = \frac{-32(n^2+1)+16n^2+16(n^2+2)}{9(n^2+2)} = 0, \therefore \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ 为定值,}$$

且定值为 0.

21. (I) 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x) = \ln x + \frac{e}{x}$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$, 所以当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内单调递减; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内单调递增.

(II) 由题意知, $\ln x + \frac{a+e-2}{x} \geq a$ 恒成立, 等价于 $x \ln x + a + e - 2 - ax \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内恒成立.

令 $g(x) = x \ln x + a + e - 2 - ax$, 则 $g'(x) = \ln x + 1 - a$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = e^{a-1}$.

| x | $(0, e^{a-1})$ | e^{a-1} | $(e^{a-1}, +\infty)$ |
|---------|----------------|-----------|----------------------|
| $g'(x)$ | - | 0 | + |
| $g(x)$ | ↓ | 极小 | ↑ |

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(e^{a-1}) = (a-1)e^{a-1} + a + e - 2 - ae^{a-1} = a + e - 2 - e^{a-1}$.

令 $t(x) = x + e - 2 - e^{x-1}$, 则 $t'(x) = 1 - e^{x-1}$, 令 $t'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

| x | $(0, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|---------|----------|----|----------------|
| $t'(x)$ | + | 0 | - |
| $t(x)$ | ↑ | 极大 | ↓ |

所以当 $a \in (0, 1)$ 时, $g(x)$ 的最小值 $t(a) > t(0) = e - 2 - \frac{1}{e} = \frac{e(e-2)-1}{e} > 0$; 当 $a \in [1, +\infty)$ 时, $g(x)$ 的最小值为 $t(a) = a + e - 2 - e^{a-1} \geq 0 = t(2)$, 所以 $a \in [1, 2]$. 综上得, $a \in (0, 2]$.

22. (I) 因为直线 l 过点 $P(1, 2)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \frac{\pi}{6}, \\ y = 2 + t \sin \frac{\pi}{6}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参

数), 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 6 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 6 \sin \theta$. (答案不唯一, 可酌情给分)

(II) 把 $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{1}{2}t, \end{cases}$ 代入 $x^2 + (y-3)^2 = 9$, 得 $t^2 + (\sqrt{3}-1)t - 7 = 0$, $\therefore t_1 t_2 = -7$. 设点 A, B 对应的参数分别为

t_1, t_2 , 则 $|PA| = |t_1|, |PB| = |t_2|$, $\therefore |PA| \cdot |PB| = 7$.

23. (I) $f(x) = \left| x - \frac{4}{a} \right| + |x+a| \geq \left| \left(x - \frac{4}{a} \right) - (x+a) \right| = \left| \frac{4}{a} + a \right| = \left| \frac{4}{a} \right| + |a| \geq 2 \sqrt{\left| \frac{4}{a} \right| \cdot |a|} = 4$.

(II) 当 $a=2$ 时, $\left| 2 - \frac{4}{a} \right| + |2+a| < 5$ 显然满足题意; 当 $0 < a < 2$ 时, $a + \frac{4}{a} < 5$, 即 $a^2 - 5a + 4 < 0$, 解得 $1 < a < 4$, 则 $1 < a < 2$; 当 $a > 2$ 时, $a^2 - a - 4 < 0$, 解得 $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, 则 $2 < a < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. 综上得, a 的取值范围

为 $\left(1, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)$.